

**Untersuchungen über
zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten**

INAUGURAL-DISSERTATION

**zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde, vorgelegt der
Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Basel**

von

ALBIN SIMON
aus Schönenbuch

**Basel
Buchdruckerei E. Birkhäuser & Cie. AG.
1950**

Untersuchungen über
zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde, vorgelegt der
Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Basel

von

ALBIN SIMON
aus Schönenbuch

Basel
Buchdruckerei E. Birkhäuser & Cie. AG.

1950

Genehmigt von der Philosophisch-naturwissenschaftlichen
Fakultät auf Antrag der Herren Professoren Dr. *E. Zwinggi* und
Ehrendozent Dr. *H. Renfer*.

Basel, den 6. Juni 1950.

Prof. Dr. *R. Wizinger*
Dekan.



Abschnitt I. Einleitung

§ 1. Ableitung der Grundformel

Die vorliegende Untersuchung setzt sich zum Ziel, die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, innert einem Jahre von einer ersten Gesamtheit in eine andere, zweite Gesamtheit überzutreten und am Ende dieses Jahres noch dieser zweiten Gesamtheit anzugehören, unter verallgemeinerten Voraussetzungen über den Verlauf der Ausscheidewahrscheinlichkeiten zu bestimmen.

Wir bezeichnen wie folgt:

l_{x+t}^I : Umfang der ersten Gesamtheit,

l_{x+t}^{II} : Umfang der zweiten Gesamtheit,

v_{x+t} : Intensität des Übertrittes von I zu II,

μ_{x+t}^I : Intensität des übrigen Ausscheidens aus I,

μ_{x+t}^{II} : Intensität des totalen Ausscheidens aus II.

Es sei mit $P_x^{I/II}$ die von uns untersuchte Wahrscheinlichkeit bezeichnet; mit Hilfe der eingeführten Symbole können wir dafür schreiben, wenn die Rückkehr zur ersten Gesamtheit ausgeschlossen ist,

$$P_x^{I/II} = \int_0^1 \frac{l_{x+t}^I}{l_x^I} v_{x+t} \frac{l_{x+1}^{II}}{l_{x+t}^{II}} dt. \quad (1)$$

Wir setzen nun nach der Theorie der Intensitätsfunktionen

$$1 - {}_tq_x^I = \exp \left(- \int_0^t \mu_{x+\tau}^I d\tau \right),$$

$$1 - {}_tq_x = \exp \left(- \int_0^t v_{x+\tau} d\tau \right),$$

$$1 - {}_tq_x^{II} = \exp \left(- \int_0^t \mu_{x+\tau}^{II} d\tau \right);$$

weil aber auch

$$\frac{l_{x+t}^I}{l_x^I} = (1 - {}_tq_x^I) (1 - {}_tq_x),$$

$$\frac{l_{x+t}^{II}}{l_{x+t}^{II}} = \frac{1 - q_x^{II}}{1 - {}_tq_x^{II}},$$

$$v_{x+t} = \frac{1}{1 - {}_tq_x} \cdot \frac{d}{dt} {}_tq_x$$

ist, erhalten wir aus (1) die Form

$$P_x^{I/II} = (1 - q_x^{II}) \int_0^1 \frac{1 - {}_tq_x^I}{1 - {}_tq_x^{II}} \cdot \frac{d}{dt} {}_tq_x dt. \quad (2)$$

§ 2. Bisherige Auswertungen der Grundformel

Unter der Annahme, daß die in (2) auftretenden Wahrscheinlichkeiten innerhalb des Jahres als linear verlaufend angesehen werden dürfen, ist (2) näherungsweise bereits mehrfach ausgewertet worden; wir betrachten im folgenden drei Lösungen näher.

a) A. Berger¹⁾ gibt den folgenden Ausdruck an:

$$P_x^{I/II} = q_x \left(1 - \frac{q_x^I}{2} \right) \left(1 - \frac{q_x^{II}}{2} \right), \quad (3)$$

wobei

q_x die einjährige Wahrscheinlichkeit von I zu II überzutreten,

q_x^I die einjährige Wahrscheinlichkeit aus anderen Ursachen als durch Übertritt aus I auszuscheiden,

q_x^{II} die einjährige Wahrscheinlichkeit aus der Gesamtheit II auszuscheiden ist.

Die Ableitung von (3) aus (1) ist ohne Schwierigkeiten durchzuführen. Setzt man

$$l_{x+v}^I = l_x^I \cdot \exp \left(- \int_0^v (v_{x+v} + \mu_{x+v}^I) dv \right)$$

und

$$l_{x+v}^{II} = l_x^{II} \cdot \exp \left(- \int_0^v \mu_{x+v}^{II} dv \right)$$

¹⁾ A. Berger: Prinzipien der Lebensversicherungstechnik, 2. Band (Berlin 1925), Formeln (54) und (55), S. 235.

in (1) ein, so folgt

$$P_x^{I/II} = \frac{l_{x+1}^{II}}{l_x^I} \int_0^1 \frac{\exp\left(-\int_0^v (v_{x+v} + \mu_{x+v}) dv\right)}{\exp\left(-\int_0^v \mu_{x+v}^{II} dv\right)} v_{x+v} dv ;$$

sodann kann man

$$\exp\left(-\int_0^v \mu_{x+v}^I dv\right) \text{ und } \exp\left(-\int_0^v \mu_{x+v}^{II} dv\right)$$

nach dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung mit den Werten

$$\left(1 - \frac{q_x^I}{2}\right) \text{ und } \left(1 - \frac{q_x^{II}}{2}\right)$$

vor das Integralzeichen setzen, im weiteren das Integral

$$\begin{aligned} \int_0^1 \exp\left(-\int_0^v v_{x+v} dv\right) v_{x+v} dv &= -\int_0^1 d \cdot \exp\left(-\int_0^v v_{x+v} dv\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\int_0^1 v_{x+v} dv\right) \end{aligned}$$

durch q_x ausdrücken; beachtet man ferner, daß

$$l_{x+1}^{II} = l_x^{II} (1 - q_x^{II}) ;$$

so erhält man

$$P_x^{I/II} = \frac{1 - q_x^{II}}{1 - \frac{q_x^{II}}{2}} \left(1 - \frac{q_x^I}{2}\right) q_x$$

oder näherungsweise

$$P_x^{I/II} \sim q_x \left(1 - \frac{q_x^I}{2}\right) \left(1 - \frac{q_x^{II}}{2}\right) = (3).$$

b) *E. Zwinggi*¹⁾ geht folgendermaßen vor. Weil

$$\frac{l_{x+q}^I}{l_x^I} = (1 - {}_eq_x)(1 - {}_eq_x^I),$$

$$v_{x+q} = \frac{1}{1 - {}_eq_x} \cdot \frac{d}{dQ} {}_eq_x,$$

$$\frac{l_{x+1}^{II}}{l_{x+q}^{II}} = \frac{l_{x+1}^{II}}{l_x^{II}} \cdot \frac{l_x^{II}}{l_{x+q}^{II}} = \frac{1 - q_x^{II}}{1 - {}_eq_x^{II}},$$

¹⁾ *E. Zwinggi*: Versicherungsmathematik (Basel 1945) Formel (42), S. 27.

so läßt sich für (1) schreiben, wenn wir Glieder höherer Ordnung vernachlässigen,

$$P_x^{I/II} = (1 - q_x^{II}) \int_0^1 \frac{1 - {}_e q_x^I}{1 - {}_e q_x^{II}} \cdot \frac{d}{d {}_e q} {}_e q_x d {}_e q$$

oder näherungsweise

$$P_x^{I/II} \sim (1 - q_x^{II}) \int_0^1 (1 - {}_e q_x^I + {}_e q_x^{II}) \frac{d}{d {}_e q} {}_e q_x d {}_e q. \quad (4)$$

Über den Verlauf der einfachen Wahrscheinlichkeiten wird sodann die Annahme getroffen, daß dieser auf der Altersstrecke x bis $x + 1$ linear sei. Damit wird

$$P_x^{I/II} \sim (1 - q_x^{II}) q_x \int_0^1 (1 - {}_e q_x^I + {}_e q_x^{II}) d {}_e q = (1 - q_x^{II}) q_x \left[1 - \frac{{}_e q_x^I}{2} + \frac{{}_e q_x^{II}}{2} \right]. \quad (5)$$

Beziehung (4) läßt sich noch auf andere Art auflösen¹⁾. Bei wiederum linearem Verlauf aller Wahrscheinlichkeiten ist

$$P_x^{I/II} = (1 - q_x^{II}) \cdot q_x \cdot \int_0^1 \frac{1 - t {}_e q_x^I}{1 - t {}_e q_x^{II}} dt,$$

und mit Partialbruchzerlegung

$$P_x^{I/II} = (1 - q_x^{II}) q_x \left[\int_0^1 \frac{{}_e q_x^I}{{}_e q_x^{II}} dt + \int_0^1 \frac{1 - \frac{{}_e q_x^I}{{}_e q_x^{II}}}{1 - t {}_e q_x^{II}} dt \right].$$

Dies integriert ergibt

$$P_x^{I/II} = (1 - q_x^{II}) q_x \left[\frac{{}_e q_x^I}{{}_e q_x^{II}} - \frac{{}_e q_x^I - q_x^{II}}{(q_x^{II})^2} \ln(1 - q_x^{II}) \right]. \quad (6)$$

Die Annahme eines linearen Verlaufs trifft nicht für alle Wahrscheinlichkeiten zu. Es stellt sich daher die Frage, zu entscheiden, ob ungeachtet der auftretenden Abweichungen im Verlauf der Wahrscheinlichkeiten die Formeln (3) bis (6) für die praktische Anwendung genügen oder ob genauere Ausdrücke notwendig sind. Dieser Frage gehen wir im folgenden nach, wobei wir zuerst für einige plausible Ansätze die Auswertung vornehmen und dann an einem praktischen Beispiel die Notwendigkeit des genaueren Rechnens entscheiden.

¹⁾ E. Zwinggi: Bemerkungen zur Berechnung von kombinierten Übertritts- und Verbleibswahrscheinlichkeiten.

Abschnitt II. Allgemeinere Auswertung der Grundformel

§ 1. Kombination von quadratischem und linearem Verlauf

1. Ansatz. Wir nehmen die drei Wahrscheinlichkeiten wie folgt an:

$$\begin{aligned} {}_tq_x^{\text{I}} &= tq_x^{\text{I}}, \\ {}_tq_x^{\text{II}} &= tq_x^{\text{II}}, \\ {}_tq_x &= at^2 + bt + c. \end{aligned}$$

Eingesetzt in (2) folgt

$$\begin{aligned} P_x^{\text{I/II}} &= (1 - q_x^{\text{II}}) \int_0^1 \frac{{}_tq_x^{\text{I}} - 1}{{}_tq_x^{\text{II}} - 1} (2at + b) dt \\ &= (1 - q_x^{\text{II}}) \int_0^1 \frac{2aq_x^{\text{I}}t^2 - (2a - bq_x^{\text{I}})t - b}{{}_tq_x^{\text{II}} - 1} dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Die Lösung des Integrals nehmen wir über Partialbruchzerlegung unter vorübergehender Verwendung neuer Parameter vor. Wir haben allgemein

$$\frac{p_1 t^2 + q_1 t + r_1}{p_2 t - 1} = A t + B + \frac{C}{p_2 t - 1}.$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit $(p_2 t - 1)$ und vergleichen die Koeffizienten von t , so wird

$$A = \frac{p_1}{p_2}, \quad B = \frac{p_1}{p_2^2} + \frac{q_1}{p_2} \quad \text{und} \quad C = r_1 + \frac{q_1}{p_2} + \frac{p_1}{p_2^2}.$$

Führen wir für p_1 , p_2 , q_1 und r_1 die wirklichen Werte ein, also $p_1 = 2aq_x^{\text{I}}$, $p_2 = q_x^{\text{II}}$, $q_1 = -(2a - bq_x^{\text{I}})$ und $r_1 = -b$, so nehmen die Parameter A , B und C die folgenden Werte an,

$$\begin{aligned} A &= 2a \frac{q_x^{\text{I}}}{q_x^{\text{II}}}, \\ B &= \frac{2aq_x^{\text{I}} - 2aq_x^{\text{II}} + bq_x^{\text{I}}q_x^{\text{II}}}{(q_x^{\text{II}})^2}, \\ C &= \frac{2aq_x^{\text{I}} - 2aq_x^{\text{II}} + bq_x^{\text{I}}q_x^{\text{II}} - b(q_x^{\text{II}})^2}{(q_x^{\text{II}})^2}, \end{aligned}$$

so daß aus (7) folgt, weil für

$$\int_0^1 \frac{p_1 t^2 + q_1 t + r_1}{p_2 t - 1} dt = \frac{A}{2} + B + \frac{C}{p_2} \ln(1 - p_2)$$

gesetzt werden kann,

$$P_x^{I/II} = (1 - q_x^{II}) \left[a \frac{q_x^I}{q_x^{II}} + 2a \frac{q_x^I - q_x^{II}}{(q_x^{II})^2} + b \frac{q_x^I}{q_x^{II}} + \right. \\ \left. + 2a \frac{q_x^I - q_x^{II}}{(q_x^{II})^3} \ln(1 - q_x^{II}) + b \frac{q_x^I - q_x^{II}}{(q_x^{II})^2} \ln(1 - q_x^{II}) \right]. \quad (8)$$

Den Spezialfall (6) erhalten wir leicht mit $a = 0$, $b = q_x$ und $c = 0$.

2. Ansatz: Wir wählen wie folgt:

$$\begin{aligned} {}_t q_x &= t q_x, \\ 1 - {}_t q_x^I &= a_1 t^2 + b_1 t + c_1, \\ 1 - {}_t q_x^{II} &= a_2 t^2 + b_2 t + c_2. \end{aligned}$$

Wir setzen sowohl $1 - {}_t q_x^I$ als auch $1 - {}_t q_x^{II}$ quadratisch an, weil beide Werte in Wirklichkeit nahezu gleich verlaufen; sofern für die eine Größe der lineare Verlauf zu ungenau ist, wird er es in der Regel auch für die andere sein.

Die Ausgangsformel (2) lautet mit den neuen Ansätzen

$$P_x^{I/II} = (1 - q_x^{II}) \int_0^1 \frac{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}{a_2 t^2 + b_2 t + c_2} \cdot \frac{d({}_t q_x)}{dt} dt = (1 - q_x^{II}) q_x \int_0^1 \frac{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}{a_2 t^2 + b_2 t + c_2} dt. \quad (9)$$

Vorerst können wir umformen

$$\int_0^1 \frac{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}{a_2 t^2 + b_2 t + c_2} dt = \int_0^1 \frac{a_1}{a_2} dt + \int_0^1 \frac{\left(b_1 - \frac{a_1}{a_2} b_2\right) t + \left(c_1 - \frac{a_1}{a_2} c_2\right)}{a_2 t^2 + b_2 t + c_2} dt.$$

Für das zweite Integral rechts schreiben wir

$$\int_0^1 \frac{A t + B}{a_2 t^2 + b_2 t + c_2} dt = \frac{A}{2 a_2} \int_0^1 \frac{2 a_2 t + b_2}{a_2 t^2 + b_2 t + c_2} dt + \left(B - \frac{A b_2}{2 a_2}\right) \int_0^1 \frac{dt}{a_2 t^2 + b_2 t + c_2},$$

wobei $A = b_1 - \frac{a_1}{a_2} b_2$ und $B = c_1 - \frac{a_1}{a_2} c_2$ ist.

Dies eingesetzt, ergibt für

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{A t + B}{a_2 t^2 + b_2 t + c_2} dt &= \frac{b_1 - \frac{a_1}{a_2} b_2}{2 a_2} \int_0^1 \frac{2 a_2 t + b_2}{a_2 t^2 + b_2 t + c_2} dt + \\ &+ \frac{2 a_2^2 c_1 - 2 a_1 a_2 c_2 - a_2 b_1 b_2 + a_1 b_2^2}{2 a_2^2} \int_0^1 \frac{dt}{a_2 t^2 + b_2 t + c_2} \end{aligned}$$

$$= \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{2 a_2^2} \ln (a_2 t^2 + b_2 t + c_2) \Big|_0^1 + \\ + \frac{2 a_2^2 c_1 - 2 a_1 a_2 c_2 - a_2 b_1 b_2 + a_1 b_2^2}{2 a_2^2} \int_0^1 f(t) dt .$$

Das Integral $\int_0^1 f(t) dt$ lösen wir zuerst ganz allgemein nach der oberen Grenze t auf. Setzen wir $t = \varphi(x)$, so erhalten wir mit Hilfe der Substitution einer neuen Integrationsvariablen

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^{\varphi(x)} f(t) dt = \int_0^x f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx + C .$$

$\alpha)$ Für $d^2 = b_2^2 - 4 a_2 c_2 > 0$ und $t = \varphi(x) = \frac{x - b_2}{2 a_2}$, also $dt = \frac{dx}{2 a_2}$, haben wir

$$\int_0^{\varphi(x)} \frac{dt}{a_2 t^2 + b_2 t + c_2} = 2 \int_0^x \frac{dx}{x^2 - d^2} + C ,$$

und durch Einsetzen der Werte $x = 2 a_2 t + b_2$ sowie mit

$$d = (b_2^2 - 4 a_2 c_2)^{\frac{1}{2}} ,$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{a_2 t^2 + b_2 t + c_2} = \frac{1}{(b_2^2 - 4 a_2 c_2)^{\frac{1}{2}}} \ln \frac{b_2 + 2 a_2 t - (b_2^2 - 4 a_2 c_2)^{\frac{1}{2}}}{b_2 + 2 a_2 t + (b_2^2 - 4 a_2 c_2)^{\frac{1}{2}}} + C .$$

Für die Grenzen 0 und 1 folgt daraus

$$\int_0^1 \frac{dt}{a_2 t^2 + b_2 t + c_2} = \frac{1}{(b_2^2 - 4 a_2 c_2)^{\frac{1}{2}}} \ln \frac{b_2 + 2 c_2 + (b_2^2 - 4 a_2 c_2)^{\frac{1}{2}}}{b_2 + 2 c_2 - (b_2^2 - 4 a_2 c_2)^{\frac{1}{2}}} .$$

Wir haben somit für (9) den folgenden endgültigen Ausdruck:

$$P_x^{I/II} = (1 - q_x^{II}) q_x \left[\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{2 a_2^2} \ln \frac{a_2 + b_2 + c_2}{c_2} + \right. \\ \left. + \frac{2 a_2 (a_2 c_1 - a_1 c_2) - b_2 (a_2 b_1 - a_1 b_2)}{2 a_2^2 (b_2^2 - 4 a_2 c_2)^{\frac{1}{2}}} \ln \frac{b_2 + 2 c_2 + (b_2^2 - 4 a_2 c_2)^{\frac{1}{2}}}{b_2 + 2 c_2 - (b_2^2 - 4 a_2 c_2)^{\frac{1}{2}}} \right] . \quad (10a)$$

$\beta)$ Für $d^2 = b_2^2 - 4 a_2 c_2 = 0$ nimmt der letzte Summand unter der eckigen Klammer die einfache Form

$$\frac{2 a_2 (a_2 c_1 - a_1 c_2) - b_2 (a_2 b_1 - a_1 b_2)}{2 a_2^2} \left[-\frac{2}{2 a_2 t + b_2} \right] \Big|_0^1 \\ = 2 \cdot \frac{2 a_2 (a_2 c_1 - a_1 c_2) - b_2 (a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2 (b_2^2 + 2 a_2 b_2)}$$

an, und es ist daher

$$P_x^{I/II} = (1 - q_x^{II}) q_x \left[\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{2 a_2^2} \ln \frac{a_2 + b_2 + c_2}{c_2} + \right. \\ \left. + 2 \cdot \frac{2 a_2 (a_2 c_1 - a_1 c_2) - b_2 (a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2 (b_2^2 + 2 a_2 b_2)} \right]. \quad (10b)$$

γ) Ist $d^2 = b_2^2 - 4 a_2 c_2 < 0$, so lautet das Integral

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{2}{(4 a_2 c_2 - b_2^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\arctg \frac{b_2 + 2 a_2}{(4 a_2 c_2 - b_2^2)^{\frac{1}{2}}} - \arctg \frac{b_2}{(4 a_2 c_2 - b_2^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \\ - \frac{2}{(4 a_2 c_2 - b_2^2)^{\frac{1}{2}}} (\alpha - \beta).$$

Für die numerische Berechnung von $\alpha - \beta$ benützen wir mit Vorteil die Beziehung

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{(4 a_2 c_2 - b_2^2)^{\frac{1}{2}}}{2 c_2 + b_2}.$$

Daraus folgt für

$$P_x^{I/II} = (1 - q_x^{II}) q_x \left[\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{2 a_2^2} \ln \frac{a_2 + b_2 + c_2}{c_2} + \right. \\ \left. + \frac{2 a_2 (a_2 c_1 - a_1 c_2) - b_2 (a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 (4 a_2 c_2 - b_2^2)^{\frac{1}{2}}} (\alpha - \beta) \right]. \quad (10c)$$

Welche der drei Formeln für die praktische Anwendung verwendet werden muß, kann hier noch nicht entschieden werden.

§ 2. Nur quadratischer Verlauf

Alle drei Wahrscheinlichkeiten sollen quadratisch verlaufen; also

$$1 - q_x^I = a_1 t^2 + b_1 t + c_1,$$

$$1 - q_x^{II} = a_2 t^2 + b_2 t + c_2,$$

$$t q_x = a_3 t^2 + b_3 t + c_3.$$

Formel (2) nimmt damit die Gestalt an

$$P_x^{I/II} = (1 - q_x^{II}) \int_0^1 \frac{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}{a_2 t^2 + b_2 t + c_2} d(a_3 t^2 + b_3 t + c_3) \\ (1 - q_x^{II}) \int_0^1 \frac{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}{a_2 t^2 + b_2 t + c_2} (2 a_3 t + b_3) dt = (1 - q_x^{II}) \int_0^1 f(t) dt. \quad (11)$$

Wir zerlegen $f(t)$ in eine Summe von ganzen und gebrochenen Funktionen, wobei bei den gebrochenen Funktionen der Zähler von niedrigerem Grade sei als der Nenner. Dann hat $f(t)$ die Form

$$f(t) = \frac{2a_1a_3}{a_2}t + \frac{2a_2a_3b_1 + a_1a_2b_3 - 2a_1a_3b_2}{a_2^2} + \\ + \frac{1}{a_2t^2 + b_2t + c_2} \left[\frac{2a_2^2a_3c_1 + a_2^2b_1b_3 - 2a_1a_2a_3c_2 - 2a_2a_3b_1b_2 - a_1a_2b_2b_3 + 2a_1a_3b_2^2}{a_2^2}t + \right. \\ \left. + \frac{2a_1a_3b_2c_2 - 2a_2a_3b_1c_2 - a_1a_2b_3c_2 + a_2^2b_3c_1}{a_2^2} \right].$$

Kürzen wir in der Klammer ab mit r und s , so folgt

$$f(t) = \frac{2a_1a_3}{a_2}t + \frac{2a_2a_3b_1 + a_1a_2b_3 - 2a_1a_3b_2}{a_2^2} + \frac{rt + s}{a_2t^2 + b_2t + c_2},$$

und

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{2a_1a_3}{a_2}t dt + \int_0^1 \frac{2a_2a_3b_1 + a_1a_2b_3 - 2a_1a_3b_2}{a_2^2} dt + \\ + \frac{r}{2a_2} \int_0^1 \frac{2a_2t + b_2}{a_2t^2 + b_2t + c_2} dt + \frac{2a_2s - rb_2}{2a_2} \int_0^1 \frac{dt}{a_2t^2 + b_2t + c_2}.$$

Die beiden letzten Integrale haben die gleiche Form wie im letzten Abschnitt; wir müssen deshalb nur noch die Größen r und s durch ihre Werte ersetzen. Wir finden

$$\frac{r}{2a_2} = \frac{2a_2a_3(a_2c_1 - a_1c_2) - 2a_3b_2(a_2b_1 - a_1b_2) + a_2b_3(a_2b_1 - a_1b_2)}{2a_2^3} = R$$

und

$$\frac{2a_2s - rb_2}{2a_2} = \frac{a_3(a_1b_2c_2 - a_2b_2c_1 - 2a_2b_1c_2)}{a_2^2} + \\ + \frac{(a_2b_3 - 2a_3b_2)(a_1b_2^2 - a_2b_1b_2 - 2a_1a_2c_2) + 2a_2^3b_3c_1}{2a_2^3} = S$$

$\alpha)$ Für $b_2^2 - 4a_2c_2 > 0$ ist somit

$$P_x^{I/II} = (1 - q_x^{\text{II}}) \left[\frac{a_1a_3}{a_2} + \frac{2a_2a_3b_1 + a_1a_2b_3 - 2a_1a_3b_2}{a_2^2} + \right. \\ \left. + R \cdot \ln \frac{a_2 + b_2 + c_2}{c_2} + \frac{S}{(b_2^2 - 4a_2c_2)^{\frac{1}{2}}} \ln \frac{b_2 + 2c_2 + (b_2^2 - 4a_2c_2)^{\frac{1}{2}}}{b_2 + 2c_2 - (b_2^2 - 4a_2c_2)^{\frac{1}{2}}} \right]. \quad (12a)$$

$\beta)$ Ist $b_2^2 - 4a_2c_2 = 0$, so ändert sich bei (12a) nur der letzte Summand, und zwar nimmt er die Form

$$\frac{4a_2S}{b_2(2a_2 + b_2)} \quad (12b)$$

an.

$\gamma)$ Für $b_2^2 - 4 a_2 c_2 < 0$ lautet der Summand

$$\frac{2 S}{(4 a_2 c_2 - b_2^2)^{\frac{1}{2}}} (\alpha - \beta), \quad (12c)$$

wo

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{(4 a_2 c_2 - b_2^2)^{\frac{1}{2}}}{2 c_2 + b_2}$$

ist.

§ 3. Kombination von exponentiellem und linearem Verlauf

Wir setzen die Wahrscheinlichkeit ${}_t q_x$ durch eine Exponentialfunktion fest, während die beiden andern als linear verlaufend angesehen werden; also

$$\begin{aligned} {}_t q_x &= \alpha - e^{-at}, \\ {}_t q_x^I &= t q_x^I, \\ {}_t q_x^{II} &= t q_x^{II}. \end{aligned}$$

Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit lautet damit

$$\begin{aligned} P_x^{I/II} &= (1 - q_x^{II}) \int_0^1 \frac{1 - {}_t q_x^I}{1 - t q_x^{II}} \cdot \frac{d(\alpha - e^{-at})}{dt} dt \\ &= (1 - q_x^{II}) \int_0^1 \left(\frac{q_x^I}{q_x^{II}} + \frac{1 - \frac{q_x^I}{q_x^{II}}}{1 - t q_x^{II}} \right) (-a e^{-at}) dt. \quad (13) \end{aligned}$$

Ausmultipliziert folgt

$$\begin{aligned} P_x^{I/II} &= (1 - q_x^{II}) \left[- \int_0^1 \frac{a q_x^I}{q_x^{II}} e^{-at} dt + \left(\frac{a q_x^I}{q_x^{II}} - a \right) \int_0^1 \frac{e^{-at}}{1 - t q_x^{II}} dt \right] \\ &= (1 - q_x^{II}) \left[\frac{q_x^I}{q_x^{II}} (e^{-a} - 1) + \left(\frac{a q_x^I}{q_x^{II}} - a \right) \int_0^1 \frac{e^{-at}}{1 - t q_x^{II}} dt \right]. \end{aligned}$$

Im Integral entwickeln wir e^{-at} in die Exponentialreihe unter Mitnahme der Glieder bis und mit dem m -ten, und dividieren durch $1 - t q_x^{II}$. Das Integral läßt sich damit darstellen als

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{1 - t q_x^{II}} \left[1 - \frac{a}{q_x^{II}} + \frac{1}{2!} \left(\frac{a}{q_x^{II}} \right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{a}{q_x^{II}} \right)^3 + \dots \right] \right. \\ &\quad \left. - 1 \left[- \frac{a}{q_x^{II}} + \frac{1}{2!} \left(\frac{a}{q_x^{II}} \right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{a}{q_x^{II}} \right)^3 + \dots \right] \right\} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -t q_x^{\text{II}} \left[\frac{1}{2!} \left(\frac{a}{q_x^{\text{II}}} \right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{a}{q_x^{\text{II}}} \right)^3 + \dots \right] \\
& - (t q_x^{\text{II}})^2 \left[-\frac{1}{3!} \left(\frac{a}{q_x^{\text{II}}} \right)^3 + \dots \right] \\
& - (t q_x^{\text{II}})^m \left[\frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!} \cdot \left(\frac{a}{q_x^{\text{II}}} \right)^{m+1} + \dots \right] \Bigg\} dt.
\end{aligned}$$

Integrieren wir und setzen dabei $\frac{a}{q_x^{\text{II}}} = r$, so folgt

$$\begin{aligned}
J = & -\frac{\ln(1-q_x^{\text{II}})}{q_x^{\text{II}}} \left(1 - r + \frac{r^2}{2!} - \frac{r^3}{3!} + \frac{r^4}{4!} - + \dots \right) \\
& - 1 \left(-r + \frac{r^2}{2!} - \frac{r^3}{3!} + \frac{r^4}{4!} - + \dots \right) \\
& - \frac{q_x^{\text{II}}}{2} \left(\frac{r^2}{2!} - \frac{r^3}{3!} + \frac{r^4}{4!} - + \dots \right) \\
& - \frac{(q_x^{\text{II}})^{m-1}}{m} \left(\frac{(-r)^m}{m!} + \frac{(-r)^{m+1}}{(m+1)!} + \dots \right).
\end{aligned}$$

Wir formen den letzten Ausdruck um, indem wir die Glieder in den Klammern zu einer Exponentialreihe erweitern; den begangenen Fehler haben wir durch Subtraktion der hinzugefügten Glieder zu kompensieren. Es wird damit

$$J = e^{-r} \left[-\frac{\ln(1-q_x^{\text{II}})}{q_x^{\text{II}}} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(q_x^{\text{II}})^{m-1}}{m} \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(q_x^{\text{II}})^{m-1}}{m} \frac{(-r)^n}{n!}.$$

Die Wahrscheinlichkeit $P_x^{\text{I/II}}$ nimmt unter Verwendung des letzten Ausdruckes die Form an

$$\begin{aligned}
P_x^{\text{I/II}} = & (1 - q_x^{\text{II}}) \left[\frac{q_x^{\text{I}}}{q_x^{\text{II}}} (e^{-a} - 1) + a \frac{q_x^{\text{II}} - q_x^{\text{I}}}{q_x^{\text{II}}} \left[e^{-\frac{a}{q_x^{\text{II}}}} \left(\frac{\ln(1-q_x^{\text{II}})}{q_x^{\text{II}}} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(q_x^{\text{II}})^{m-1}}{m} \right) - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(q_x^{\text{II}})^{m-1}}{m} \frac{\left(-\frac{a}{q_x^{\text{II}}} \right)^n}{n!} \right] \right]. \quad (14)
\end{aligned}$$

Bei der numerischen Anwendung wird man die Summation nicht bis ins Unendliche führen, sondern je nach der Größenordnung von a und q_x^{II} vorzeitig abbrechen.

§ 4. Kombination von hyperbolischem und linearem Verlauf

Die Wahrscheinlichkeit ${}_tq_x$ verlaufe hyperbolisch, während die beiden andern Wahrscheinlichkeiten als linear verlaufend angenommen werden. Es sei also

$$\begin{aligned} {}_tq_x &= \frac{a}{b+ct}, \\ {}_tq_x^{\text{I}} &= t q_x^{\text{I}}, \\ {}_tq_x^{\text{II}} &= t q_x^{\text{II}}. \end{aligned}$$

Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit lautet damit

$$P_x^{\text{I/II}} = (1 - q_x^{\text{II}}) \int_0^1 \frac{1-t q_x^{\text{I}}}{1-t q_x^{\text{II}}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{a}{b+ct} \right) dt. \quad (15)$$

Zur Lösung des Integrals differenzieren wir zuerst und multiplizieren aus; wir finden

$$\begin{aligned} P_x^{\text{I/II}} &= (1 - q_x^{\text{II}}) \left[-\frac{ac q_x^{\text{I}}}{q_x^{\text{II}}} \int_0^1 \frac{dt}{(b+ct)^2} + ac \left(\frac{q_x^{\text{I}}}{q_x^{\text{II}}} - 1 \right) \int_0^1 \frac{dt}{(1 - q_x^{\text{II}} t)(b+ct)^2} \right] \\ &= (1 - q_x^{\text{II}}) \left[-\frac{ac q_x^{\text{I}}}{q_x^{\text{II}}} \int_0^1 f_1(t) dt + ac \left(\frac{q_x^{\text{I}}}{q_x^{\text{II}}} - 1 \right) \int_0^1 f_2(t) dt \right]. \end{aligned}$$

Das erste Integral ist einfach auszuwerten; es wird

$$\int_0^1 f_1(t) dt = -\frac{1}{c} \cdot \frac{1}{b+ct} \Big|_0^1 = \frac{1}{b^2 + bc}.$$

Beim zweiten Integral zerlegen wir in die Partialbrüche

$$\frac{1}{(1-t q_x^{\text{II}})(b+ct)^2} = \frac{A}{1-t q_x^{\text{II}}} + \frac{B}{(b+ct)} + \frac{C}{(b+ct)^2},$$

und erhalten für $t = \frac{1}{q_x^{\text{II}}}$ den Wert $A = \frac{(q_x^{\text{II}})^2}{(q_x^{\text{II}} b + c)^2}$, für $t = 0$ den Wert $B = \frac{q_x^{\text{II}} \cdot c}{(q_x^{\text{II}} b + c)^2}$ und für $t = -\frac{b}{c}$ den Wert $C = \frac{c}{q_x^{\text{II}} b + c}$. Das Integral von $f_2(t) dt$ wird somit

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_2(t) dt &= \frac{(q_x^{\text{II}})^2}{(q_x^{\text{II}} b + c)^2} \int_0^1 \frac{dt}{1-t q_x^{\text{II}}} + \frac{q_x^{\text{II}} c}{(q_x^{\text{II}} b + c)^2} \int_0^1 \frac{dt}{b+ct} + \frac{c}{q_x^{\text{II}} b + c} \int_0^1 \frac{dt}{(b+ct)^2} \\ &= \frac{q_x^{\text{II}}}{(q_x^{\text{II}} b + c)^2} \left[\ln \frac{b+c}{b} - \ln(1-q_x^{\text{II}}) \right] + \frac{1}{q_x^{\text{II}} b + c} \cdot \frac{c}{b^2 + bc}. \end{aligned}$$

Für die Wahrscheinlichkeit $P_x^{I/II}$ folgt schließlich

$$P_x^{I/II} = (1 - q_x^{II}) \left\{ - \frac{a c q_x^I}{q_x^{II} (b^2 + b c)} + a c \frac{q_x^I - q_x^{II}}{q_x^{II}} \left[\frac{q_x^{II}}{(q_x^{II} b + c)^2} \left(\ln \frac{b+c}{b} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \ln (1 - q_x^{II}) \right) + \frac{1}{q_x^{II} b + c} \cdot \frac{c}{b^2 + b c} \right] \right\}. \quad (16)$$

Wir wollen mit der letzten Gleichung die Auswertung von (2) für verschiedene Kombinationen der nicht nur linear verlaufenden einfachen Wahrscheinlichkeiten abschließen. Sollten die Beziehungen (8) bis (16) zu fühlbaren Abweichungen gegenüber (3) und (5) führen, so hätte man vor Anwendung der genaueren Ausdrücke die Ermittlung der einfachen Wahrscheinlichkeiten aus den Beobachtungszahlen den Erkenntnissen anzupassen. Es wäre sinnwidrig, für die Wahrscheinlichkeiten z. B. exponentiellen Verlauf vorauszusetzen, zu gleicher Zeit aber für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten aus den Beobachtungszahlen eine andere Verteilung als die exponentielle anzunehmen.

Im Folgenden werden wir Formeln für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten aus den Beobachtungszahlen bei nicht linearer Verteilung der Ausscheidefälle im Beobachtungsjahre ableiten, ohne dabei vorerst zu untersuchen, wie weit dies durch die auftretenden Abweichungen geboten wäre.

Abschnitt III. Bestimmung der einfachen Wahrscheinlichkeiten aus den Beobachtungszahlen

§ 1. Die Beobachtungszahlen

Für ein bestimmtes Alter x sollen in einem Bestand, der sinngemäß lauter Personen enthält, welche der ersten Gesamtheit angehören, die folgenden Zahlen gegeben sein,

L_0 = Bestand zu Beginn des Beobachtungsjahres,

H = Zahl der im Beobachtungsjahr von der ersten Gesamtheit zur zweiten Gesamtheit übergetretenen Personen,

T = Zahl der im Beobachtungsjahr durch Tod ausgeschiedenen Personen,

R = Sonstiger Abgang im Beobachtungsjahr; R kann auch negativ sein.

Diesem Schema liegt die Vereinfachung zugrunde, daß außer Übertritt von der ersten zur zweiten Gesamtheit nur Tod als zu messender Grund des Ausscheidens vorkommen soll. Formal würde uns

nichts hindern, T und R zusammenzufassen und das Ausscheiden außer durch Übertritt total zu erfassen. Je nach den später getroffenen Annahmen über den Verlauf der Ausscheidefälle im Beobachtungsjahr müssen die Werte H , T und R auch für kleinere Intervalle als ein Jahr bekannt sein, um die Parameter a , b und c bestimmen zu können.

Wie schon im ersten Teil, sei bezeichnet mit v_x die Intensität des Übertrittes von I zu II und mit μ_x die Intensität des Ausscheidens aus I durch Tod.

§ 2. Kombination von linearem und quadratischem Verlauf der Beobachtungszahlen

Von $L(x+h)$ Personen des erreichten Alters $x+h$, wobei $0 \leq h \leq 1$ ist, sollen im Zeitabschnitt h bis $h+dh$ durch Tod $L(x+h) \mu_{x+h} dh$ ausscheiden. Nehmen wir an, daß die Todesfälle linear über das Beobachtungsjahr verteilt sind, so ist

$$L(x+h) \mu_{x+h} dh = (c_1 + b_1 h) dh. \quad (18)$$

Im gleich Zeitabschnitt h bis $h+dh$ treten $L(x+h) v_{x+h} dh$ Personen aus der ersten zur zweiten Gesamtheit über. Da wir für die zugehörigen Maßzahlen quadratischen Verlauf annehmen wollen¹⁾, setzen wir

$$L(x+h) v_{x+h} dh = (c_2 + b_2 h + a_2 h^2) dh. \quad (19)$$

Wegen (18) und (19) und bei Wahl der gleichmäßigen Verteilung des sonstigen Abgangs über das Beobachtungsjahr finden wir für

$$\begin{aligned} L_{(x+h)} &= L_0 - \int_0^h (R + c_1 + c_2 + (b_1 + b_2)k + a_2 k^2) dk \\ &= L_0 - \left[(R + c_1 + c_2)h + \frac{b_1 + b_2}{2} h^2 + \frac{a_2}{3} h^3 \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Ferner ist aus (18) und (19)

$$\mu_{x+h} = \frac{c_1 + b_1 h}{L_0 - (R + c_1 + c_2)h - \frac{b_1 + b_2}{2} h^2 - \frac{a_2}{3} h^3} \quad (21)$$

¹⁾ Bezeichnen wir mit $\frac{1}{2}H$ die Zahl der in der ersten Hälfte des Beobachtungsjahres durch Heirat ausgeschiedenen Personen, so können wir die Parameter z. B. folgendermaßen bestimmen. Für quadratischen Verlauf, also für $\frac{1}{2}H = ah^2 + bh + c$, folgt somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}H &= a + b + c, \\ \frac{1}{4}H &= \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c, \\ \frac{0}{6}H &= c = 0 \end{aligned}$$

und schließlich $q = 2\frac{1}{2}H - 4\frac{1}{4}H$ und $b = 2\frac{1}{2}H - \frac{1}{4}H$.

und

$$\nu_{x+h} = \frac{c_2 + b_2 h + a_2 h^2}{L_0 - (R + c_1 + c_2)h - \frac{b_1 + b_2}{2} h^2 - \frac{a_2}{3} h^3}. \quad (21a)$$

Wir erweitern (21) und (21a) mit $d = -\frac{3}{a_2}$ und kürzen ab mit

$$e = -d \frac{b_1 + b_2}{2}, \quad f = -d(R + c_1 + c_2), \quad g = dL_0$$

und haben dann

$$\mu_{x+h} = d \frac{c_1 + b_1 h}{g + f h + e h^2 + h^3} \quad (22)$$

und für

$$\nu_{x+h} = d \frac{c_2 + b_2 h + a_2 h^2}{g + f h + e h^2 + h^3}. \quad (22a)$$

Wir setzen nun (22) und (22a) in die Definitionsgleichung für die einjährige, unabhängige Wahrscheinlichkeit q_x^I und q_x ein und erhalten

$$\begin{aligned} q_x^I &= 1 - \exp\left(-\int_0^1 \mu_{x+h} dh\right) \\ &= 1 - \exp\left(-d \int_0^1 \frac{c_1 + b_1 h}{g + f h + e h^2 + h^3} dh\right) = 1 - e^{-\text{Exp I}} \end{aligned} \quad (23)$$

und

$$\begin{aligned} q_x &= 1 - \exp\left(-\int_0^1 \nu_{x+h} dh\right) \\ &= 1 - \exp\left(-d \int_0^1 \frac{c_2 + b_2 h^2 + a_2 h^2}{g + f h + e h^2 + h^3} dh\right) = 1 - e^{-\text{Exp II}}. \end{aligned} \quad (23a)$$

Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung folgt für

$$\begin{aligned} -\text{Exp I} &= -d \int_0^1 \frac{c_1 + b_1 h}{g + f h + e h^2 + h^3} dh = -d \left[A \int_0^1 \frac{dh}{\alpha + h} + B \int_0^1 \frac{dh}{\beta + h} + \right. \\ &\quad \left. + C \int_0^1 \frac{dh}{\gamma + h} \right] = -d \left[A \ln \frac{1+\alpha}{\alpha} + B \ln \frac{1+\beta}{\beta} + C \ln \frac{1+\gamma}{\gamma} \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Damit wird aus (23)

$$q_x^I = 1 - \exp\left(-d \left[A \ln \frac{1+\alpha}{\alpha} + B \ln \frac{1+\beta}{\beta} + C \ln \frac{1+\gamma}{\gamma} \right]\right),$$

woraus weiter folgt

$$q_x^I = 1 - \left[\left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^{dA} \cdot \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^{dB} \cdot \left(\frac{\gamma}{1+\gamma} \right)^{dC} \right]. \quad (25)$$

Wollen wir aus (23a) noch q_x bestimmen, so gehen wir in gleicher Weise vor. Da im Nenner des Bruches unter dem Integral der gleiche Ausdruck steht wie in (23), gelangen wir äußerlich zu einer gleichen Formel (25), wobei die Partialbruchzerlegung lautet

$$\frac{c_2 + b_2 h + a_2 h^2}{g + f h + e h^2 + h^3} = \frac{A}{\alpha + h} + \frac{B}{\beta + h} + \frac{C}{\gamma + h}.$$

§ 3. Nur quadratischer Verlauf

Wir nehmen an, daß sich die Todesfälle quadratisch über das Beobachtungsjahr verteilen, haben also zu setzen

$$L_{(x+h)} \mu_{x+h} dh = (c_1 + b_1 h + a_1 h^2) dh. \quad (26)$$

Den Verlauf der Übertritte lassen wir gleich wie vorher, setzen also

$$L_{(x+h)} v_{x+h} dh = (c_2 + b_2 h + a_2 h^2) dh. \quad (26a)$$

Nehmen wir noch an, der sonstige Abgang verteile sich gleichmäßig über das ganze Jahr, so folgt für

$$\begin{aligned} L_{(x+h)} &= L_0 - \int_0^h (R + c_1 + c_2 + (b_1 + b_2)k + (a_1 + a_2)k^2) dk \\ &= L_0 - \left[(R + c_1 + c_2)h + \frac{1}{2} (b_1 + b_2)h^2 + \frac{1}{3} (a_1 + a_2)h^3 \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Für μ_{x+h} und v_{x+h} finden wir den folgenden Ausdruck, in dem der Nenner eine Parabel dritten Grades bildet:

$$\begin{aligned} \mu_{x+h} &= \frac{c_1 + b_1 h + a_1 h^2}{L_0 - \left[(R + c_1 + c_2)h + \frac{1}{2} (b_1 + b_2)h^2 + \frac{1}{3} (a_1 + a_2)h^3 \right]}, \\ v_{x+h} &= \frac{c_2 + b_2 h + a_2 h^2}{L_0 - \left[(R + c_1 + c_2)h + \frac{1}{2} (b_1 + b_2)h^2 + \frac{1}{3} (a_1 + a_2)h^3 \right]}. \end{aligned}$$

Setzen wir μ_{x+h} und v_{x+h} in die Definitionsgleichung für die einjährige, unabhängige Wahrscheinlichkeit ein und lösen das Integral im Exponent mit Hilfe der Partialbruchzerlegung, so erhalten wir formal den gleichen Ausdruck wie vorher, nämlich

$$q_x = 1 - \left[\left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^{dA} \cdot \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^{dB} \cdot \left(\frac{\gamma}{1+\gamma} \right)^{dC} \right]. \quad (28)$$

Dabei ist $d = -\frac{3}{a_1 + a_2}$.

§ 4. Kombination von exponentiellem und linearem Verlauf

Wir legen den Verlauf der Übertritte von der ersten Gesamtheit in die zweite durch eine Exponentialfunktion fest, haben also zu setzen

$$L_{(x+h)} \nu_{x+h} dh = (\alpha + e^{-ah}) dh; \quad (29)$$

für die Todesfälle nehmen wir linearen Verlauf an, d. h.

$$L_{(x+h)} \mu_{x+h} dh = (b + ch) dh. \quad (29a)$$

Mit diesen Voraussetzungen finden wir für

$$\begin{aligned} L_{(x+h)} &= L_0 - \int_0^h (R + b + \alpha + ck + e^{-ak}) dk \\ &= L_0 - \left[\frac{1}{a} + (R + b + \alpha)h + \frac{c}{2}h^2 - \frac{e^{-ah}}{a} \right]. \end{aligned}$$

Setzen wir $b_1 = L_0 - \frac{1}{a}$, $c_1 = -(R + b + \alpha)$ und $d_1 = -\frac{c}{2}$ so erhalten wir für die Intensität ν_{x+h} , bzw. die Wahrscheinlichkeit q_x

$$\nu_{x+h} = \frac{\alpha + e^{-ah}}{b_1 + c_1 h + d_1 h^2 + \frac{e^{-ah}}{a}},$$

bzw.

$$q_x = 1 - \exp \left(- \int_0^1 \frac{\alpha + e^{-ah}}{b_1 + c_1 h + d_1 h^2 + \frac{e^{-ah}}{a}} dh \right). \quad (30)$$

Wir entwickeln sodann die Exponentialfunktion unter dem Integral in die Reihe und haben für den Zähler bzw. für den Nenner

$$\text{Zähler} = \alpha + e^{-ah} = \alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ah)^n}{n!} \cdot (-1)^n,$$

bzw.

$$\text{Nenner} = b_1 + c_1 h + d_1 h^2 + \frac{e^{-ah}}{a} = \beta + \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(ah)^n}{n!},$$

wobei $\beta = b_1 + c_1 h + d_1 h^2$ ist.

Dividieren wir aus, und zwar so, daß wir mit der höchsten Potenz von h beginnen, so wird

$$Z:N = a + \frac{\alpha - \beta a}{\beta + \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(ah)^n}{n!}}.$$

Sodann zerlegen wir in Partialbrüche. Für unseren Fall dürfen wir bei Potenzen von h höher als h^4 abbrechen; es bleibt

$$\frac{\alpha - a b_1 - a c_1 h - a d_1 h^2}{\left(b_1 + \frac{1}{a}\right) + (c_1 - 1)h + \left(d_1 + \frac{a}{2}\right)h^2 - \frac{a^2 h^3}{3!} + \frac{a^3 h^4}{4!}} = \frac{A}{(\alpha + h)} + \frac{B}{(\beta + h)} +$$

$$+ \frac{C}{(\gamma + h)} + \frac{D}{(\delta + \varepsilon h)}.$$

Damit folgt aber aus (30)

$$q_x = 1 - e^{-a} \left[\left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)^A \cdot \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^B \cdot \left(\frac{\gamma}{1 + \gamma} \right)^C \cdot \left(\frac{\delta}{\varepsilon + \delta} \right)^D \right]. \quad (31)$$

Für die Sterbewahrscheinlichkeit haben wir die Ausgangsform

$$q_x^I = 1 - \exp \left(- \int_0^1 \frac{b + c h}{b_1 + c_1 h + d_1 h^2} \frac{e^{-a h}}{a} dh \right). \quad (30a)$$

Auch hier entwickeln wir den Exponentialausdruck in die Reihe und zerlegen in Partialbrüche. Zur Bestimmung der Parameter bleibt die Gleichung

$$\frac{b + c h}{\left(b_1 + \frac{1}{a}\right) + (c_1 - 1)h + \left(d_1 + \frac{a}{2}\right)h^2 - \frac{a^2 h^3}{3!} + \frac{a^3 h^4}{4!}} = \frac{A}{(\alpha + h)} + \frac{B}{(\beta + h)} + \frac{C}{(\gamma + h)} + \frac{D}{(\delta + \varepsilon h)}.$$

Aus (30a) folgt schließlich

$$q_x^I = 1 - \left[\left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)^A \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^B \left(\frac{\gamma}{1 + \gamma} \right)^C \left(\frac{\delta}{\varepsilon + \delta} \right)^D \right]. \quad (31a)$$

§ 5. Kombination von hyperbolischem und linearem Verlauf

Wir setzen den Verlauf der Übertritte von der ersten zur zweiten Gesamtheit mit ${}_t q_x = \frac{a}{b + c t}$ fest und bekommen

$$L_{(x+h)} v_{x+h} dh = \frac{a}{b + c h} dh. \quad (32)$$

Den Verlauf der Todesfälle lassen wir linear, also

$$L_{(x+h)} \mu_{x+h} dh = (c_1 + b_1 h) dh. \quad (32a)$$

Damit folgt

$$L_{(x+h)} = L_0 - \int_0^h \left(R + c_1 + b_1 k + \frac{a}{b + c k} \right) dk$$

$$= L_0 - \left[(R + c_1) h + \frac{b_1}{2} h^2 + \frac{a}{c} \ln \left(1 + \frac{c}{b} h \right) \right].$$

Wir schreiben abkürzend für $L_0 = d$, $-(R + c_1) = e$ und für $\frac{b_1}{2} = f$; dann ist

$$v_{x+h} = \frac{a}{d + eh + fh^2 - \frac{a}{c} \ln \left(1 + \frac{c}{b} h \right)}$$

und

$$q_x = 1 - \exp \left(- \int_0^1 \frac{\frac{a}{b + ch}}{d + eh + fh^2 - \frac{a}{b} \ln \left(1 + \frac{c}{b} h \right)} dh \right) = 1 - e^{-\int_0^1 \text{Exp I } dh} \quad (33)$$

Ist $-1 < \frac{c}{b} < 1$, so können wir den Logarithmus in die Reihe entwickeln. Ob diese Voraussetzung zutrifft, kann man nicht zum voraus erkennen, sondern ist aus dem praktisch vorliegenden Fall zu entscheiden. Wir nehmen im folgenden an, daß dies zutrefte, und finden, wenn wir beim dritten Glied abbrechen,

$$\text{Exp I} = \frac{a}{(b + ch) \left[d + \left(e - \frac{a}{b} \right) h + \left(f + \frac{1}{2} \frac{ac}{b^2} \right) h^2 - \frac{1}{3} \frac{ac^2}{b^3} h^3 \right]}$$

Diesen Ausdruck zerlegen wir und erhalten

$$\text{Exp I} = \frac{A}{b + ch} + \frac{B}{\alpha + h} + \frac{C}{\beta + h} + \frac{D}{\gamma + \delta h};$$

aus (33) folgt dann

$$q_x = 1 - \left[\left(\frac{b}{c + b} \right)^A \cdot \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)^B \cdot \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^C \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta + \gamma} \right)^D \right]. \quad (34)$$

Für die Wahrscheinlichkeit q_x^{I} wird aus (32)

$$q_x^{\text{I}} = 1 - \exp \left(- \int_0^1 \frac{c_1 + b_1 h}{d + \left(e - \frac{a}{b} \right) h + \left(f + \frac{1}{2} \frac{ac}{b^2} \right) h^2 - \frac{1}{3} \frac{ac^2}{b^3} h^3} dh \right),$$

und wenn wir auch hier die Partialbruchzerlegung anwenden,

$$q_x^{\text{I}} = 1 - \left[\left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)^A \cdot \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^B \cdot \left(\frac{\gamma}{\gamma + \delta} \right)^C \right] \quad (34a)$$

mit

$$\frac{c_1 + b_1 h}{d + \left(e - \frac{a}{b} \right) h + \left(f + \frac{1}{2} \frac{ac}{b^2} \right) h^2 - \frac{1}{3} \frac{ac^2}{b^3} h^3} = \frac{A}{\alpha + h} + \frac{B}{\beta + h} + \frac{C}{\gamma + \delta h}.$$

Abschnitt IV. Numerische Auswertung

§ 1. Die Ausgangswahrscheinlichkeiten

Die unter allgemeinen Voraussetzungen über den Verlauf der einfachen Wahrscheinlichkeiten abgeleiteten Formeln für $P_x^{I/II}$ erlauben nicht, über die Abweichungen gegenüber den bis jetzt angewandten etwas auszusagen; nur die numerische Auswertung läßt vergleichen. Wir sind daher gezwungen, mindestens ein Beispiel durchzurechnen. Dies kann auf zwei Arten geschehen.

Nehmen wir z. B. die Kombination von linearem und quadratischem Verlauf, so können wir ${}_tq_x^I$ und ${}_tq_x^{II}$ jeweils fest wählen und die Größe ${}_tq_x$, welche durch eine Parabel zweiten Grades gegeben sein soll, variieren. Damit können wir $P_x^{I/II}$ nach den Formeln (3), (5) und (8) berechnen und entscheiden, ob die Abweichung der genauen Formel (8) von (3) und (5) ins Gewicht fällt.

Wir können aber auch ${}_tq_x$ fest wählen und die beiden andern Wahrscheinlichkeiten in gewissen Grenzen variieren. Auch auf diese Art erhalten wir eine Vergleichsmöglichkeit.

Für unsere Auswertung wählen wir beide Verfahren. Die erste Gesamtheit sei die Gesamtheit der Ledigen, die zweite die Gesamtheit der Verheirateten. Die Größe ${}_tq_x$ ist alsdann die gewöhnliche Heiratswahrscheinlichkeit. Die beiden andern Wahrscheinlichkeiten dürfen als ähnlich verlaufend angesehen werden. Sofern nur Tod als Ausscheideursache wirkt, ist ${}_tq_x^I$ die Sterbewahrscheinlichkeit der Ledigen und ${}_tq_x^{II}$ die Wahrscheinlichkeit, daß die Ehe aufgelöst wird, sei es durch Tod des Mannes oder der Frau.

Die Größe $P_x^{I/II}$ hat alsdann den Sinn der Wahrscheinlichkeit, innerhalb Jahresfrist zu heiraten und am Jahresende noch verheiratet zu sein. Allerdings ist das formale Vorgehen der Rechnung zu beachten; wir können nicht zu beobachteten ${}_tq_x$ die Werte ${}_tq_x^I$ und ${}_tq_x^{II}$ beliebig variieren, ohne zu Verhältnissen zu gelangen, die in Wirklichkeit ausgeschlossen sind. Da wir aber nur den Einfluß der „Krümmung“ von ${}_tq_x$ erfassen wollen, dürfen wir aus dem Ergebnis der Rechnung dennoch Schlüsse ziehen.

Die ziffernmäßige Auswertung gliedert sich in zwei Stufen. Zuerst werden die beobachteten einjährigen Heiratswahrscheinlichkeiten 1939/44¹⁾ für Männer durch orthogonale Polynome ausgeglichen. Zur Prüfung der Frage, wie weit die genaueren Formeln nötig sind, wird man vorteilhaft eine Altersstrecke wählen, auf welcher die ${}_tq_x$ ein Maximum durchlaufen, ${}_tq_x$ also nur schlecht durch eine Gerade appro-

¹⁾ Wir danken an dieser Stelle dem *Eidgenössischen Statistischen Amt* für die bereitwilligst zur Verfügung gestellten Beobachtungswerte bestens.

ximiert werden kann. Sodann wird man aus den ausgeglichenen einjährigen Werten die Parameter der Kurve, welche den Ablauf von ${}_tq_x$ im einzelnen Altersjahr wiedergeben sollen, festzulegen haben.

Bei der Wahl von sieben Beobachtungswerten erhalten wir für die einjährige Heiratswahrscheinlichkeit der Männer den folgenden Verlauf für ${}_1q_x$:

x	beobachtet	ausgeglichen mit Parabel	
		2. Grades	3. Grades
25	0,10103	0,10154	0,10116
26	0,11763	0,11620	0,11659
27	0,12548	0,12605	0,12643
28	0,13117	0,13117	0,13117
29	0,13101	0,13161	0,13124
30	0,12740	0,12735	0,12695
31	0,11866	0,11835	0,11874
	0,85238	0,85237	0,85228

Weil in den Formeln $t \leq 1$, genügt es, für ${}_tq_x$ quadratischen Verlauf festzulegen. Wir haben also für ${}_tq_x$, indem wir die von t unabhängige Größe ${}_1q_x$ ausklammern,

$${}_tq_x = {}_1q_x (a t^2 + b t + c). \quad (35)$$

Damit lautet (8)

$$P_x^{\text{I/II}} = (1 - q_x^{\text{II}}) {}_1q_x \left[a \frac{q_x^{\text{I}}}{q_x^{\text{II}}} + 2a \frac{q_x^{\text{I}} - q_x^{\text{II}}}{(q_x^{\text{II}})^2} + b \frac{q_x^{\text{I}}}{q_x^{\text{II}}} + \right. \\ \left. + 2a \frac{q_x^{\text{I}} - q_x^{\text{II}}}{(q_x^{\text{II}})^3} \ln(1 - q_x^{\text{II}}) + b \frac{q_x^{\text{I}} - q_x^{\text{II}}}{(q_x^{\text{II}})^2} \ln(1 - q_x^{\text{II}}) \right].$$

Die Werte von ${}_tq_x$ für $0 \leq t \leq 1$ erhalten wir am einfachsten durch Subtabulation aus der unabhängigen Ordnung der Ledigen.

x	$l_x^{(e)}$	${}_{0.2}d_x^{(e)}$	${}_{0.2}q_x^{(e)}$	${}_{x-28}q_{28}^{(e)}$
28,0	100000	2746	0,02746	0,00000
28,2	97254	2687	0,02763	0,02746
28,4	94567	2626	0,02777	0,05433
26,6	91941	2563	0,02788	0,08059
28,8	89378	2495	0,02792	0,10622
29,0	86883			0,13117

Mit Hilfe dieser Werte können wir nunmehr die Parameter a , b und c bestimmen. Wenn wir (35) durch ${}_1q_x$ dividieren, so erhalten wir die folgenden fünf Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0,20936 &= 0,04a + 0,2b \\ 0,41420 &= 0,16a + 0,4b \\ 0,61439 &= 0,36a + 0,6b \\ 0,80979 &= 0,64a + 0,8b \\ 1,00000 &= a + b. \end{aligned}$$

Indem wir sodann $t = 0$ setzen, folgt sofort $c = 0$.

Zur Bestimmung von a und b bestehen verschiedene Wege, so z. B. die Methode der kleinsten Quadrate. Wir erhalten aber den Verlauf genauer, wenn wir a und b derart bestimmen, daß wir die erste und fünfte Gleichung, bzw. die zweite und vierte Gleichung addieren und die dritte Gleichung mit zwei multiplizieren. Wir haben also:

$$\begin{aligned} 1,20936 &= 1,04a + 1,2b \\ 1,22399 &= 0,80a + 1,2b \\ 1,22878 &= 0,72a + 1,2b. \end{aligned}$$

Nun subtrahieren wir die erste Gleichung von der zweiten, bzw. die dritte Gleichung von der zweiten und erhalten

$$\begin{aligned} 0,01463 &= -0,24a \\ 0,00479 &= -0,08a, \end{aligned}$$

woraus $a = -0,060688$ und $b = 1,060450$.

1. Möglichkeit. Mit Hilfe der so bestimmten Konstanten berechnen wir die kombinierte Wahrscheinlichkeit nach den Formeln (3), (5) und vergleichen mit (8), welche ein quadratisch verlaufendes ${}_tq_x$ voraussetzt. Zu der nun fest gewählten Wahrscheinlichkeit ${}_tq_x$ variieren wir die beiden ändern, linear verlaufend angenommenen Wahrscheinlichkeiten ${}_tq_x^I$ und ${}_tq_x^{II}$.

Die Ziffernbeispiele zeigen, daß beim angenommenen Verlauf die Formeln (3) und (5) genügen, denn erst bei großen Werten für q_x^I und q_x^{II} treten die Abweichungen gegenüber (8) stärker hervor; dabei ist noch zu bemerken, daß (8) meistens zwischen den Werten (3) und (5) liegt. Die vorausgesetzten großen Werte der beiden Wahrscheinlichkeiten werden aber in Wirklichkeit kaum vorkommen.

Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

q_x^I	q_x^{II}	(3)	(5)	(8)
0,004	0,004	0,13065	0,13065	0,13062
	0,002	0,13078	0,13078	0,13074
	0,010	0,13025	0,13025	0,13024
0,01	0,003	0,13032	0,13032	0,13033
	0,005	0,13019	0,13019	0,13022
	0,020	0,12921	0,12919	0,12915
	0,030	0,12856	0,12851	0,12847
0,05	0,02	0,12661	0,12662	0,12662
	0,04	0,12533	0,12529	0,12526
	0,10	0,12151	0,12100	0,12099
	0,15	0,11831	0,11707	0,11753
	0,20	0,11510	0,11281	0,11396
0,10	0,03	0,12274	0,12278	0,12275
	0,05	0,12150	0,12150	0,12155
	0,20	0,11215	0,11018	0,11084
	0,30	0,10592	0,10100	0,10307
0,20	0,10	0,11215	0,11215	0,11183
	0,40	0,09444	0,08657	0,08930

2. Möglichkeit. Wie sich die Übereinstimmung bei quadratischem Verlauf aller Wahrscheinlichkeiten verhält, wollen wir an den folgenden Beispielen untersuchen, die der Wirklichkeit nahe kommen. Die Annahmen lauten mit quadratischem Verlauf aller Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned}
 {}_t q_x &= {}_1 q_x (a_3 t^2 + b_3 t + c_3), \\
 1 - {}_t q_x^I &= {}_1 p_x^I (a_1 t^2 + b_1 t + c_1) = {}_t p_x^I, \\
 1 - {}_t q_x^{II} &= {}_1 p_x^{II} (a_2 t^2 + b_2 t + c_2) = {}_t p_x^{II}.
 \end{aligned}$$

Welche der drei Formeln (12) anzuwenden sein wird, kann erst entschieden werden, wenn bekannt ist, ob $b_2^2 - 4 a_2 c_2 \geq 0$ ist. Dazu bestimmen wir die Parameter a_2 , b_2 , c_2 . Aus der Volkssterbetafel SM 1939/44 ermitteln wir vorerst die null-, ein- und zweijährigen Überlebenswahrscheinlichkeiten vom Alter $x = 28$ aus; wir erhalten dafür die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}
 1 &= {}_1 p_x^{II} \cdot (0 + 0 + c_3) = {}_0 p_x^{II}, \\
 0,996974 &= {}_1 p_x^{II} (a_2 + b_2 + c_2) = {}_1 p_x^{II}, \\
 0,993992 &= {}_1 p_x^{II} (4 a_2 + 2 b_2 + c_2) = {}_2 p_x^{II}
 \end{aligned}$$

oder auch, indem wir durch ${}_1p_x^{\text{II}}$ dividieren,

$$1,003\,040 = c_2$$

$$1,000\,000 = a_2 + b_2 + c_2$$

$$0,997\,009 = 4\,a_2 + 2\,b_2 + c_2.$$

Daraus bestimmen wir die drei Parameter zu $a_2 = 0,000\,024$, $b_2 = -0,003\,064$ und $c_2 = 1,003\,040$. Wir erkennen, daß wir nach (12c) rechnen müssen, d. h.

$$\begin{aligned} P_x^{\text{I/II}} = (1 - q_x^{\text{II}}) q_x \cdot \frac{p_x^{\text{I}}}{p_x^{\text{II}}} & \left[\frac{a_1 a_3}{a_2} + \frac{2\,a_2 a_3 b_1 + a_1 a_2 b_3 - 2\,a_1 a_3 b_2}{a_2^2} + \right. \\ & \left. + R \ln \frac{a_2 + b_2 + c_2}{c_2} + \frac{2\,S}{(4\,a_2 c_2 - b_2^2)^{\frac{1}{2}}} (\alpha - \beta) \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

Für die Berechnung von $\alpha - \beta$ benützen wir die Beziehung

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{(4\,a_2 c_2 - b_2^2)^{\frac{1}{2}}}{2\,c_2 + b_2},$$

und haben $\alpha - \beta = 0,004\,654$.

Setzen wir nun die Wahrscheinlichkeiten ${}_tq_x^{\text{I}}$ und ${}_tq_x^{\text{II}}$ einander gleich, so haben wir in der Klammer nur $a_3 + b_3$, wo a_3 und b_3 die Parameter von ${}_tq_x$ sind, also $a_3 = -0,060\,688$ und $b_3 = 1,060\,450$. Die Werte der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit nach den Formeln (3), (5) und (12c) berechnet, sind die folgenden:

q_x	$q_x^{\text{I}} = q_x^{\text{II}}$	(3)	(5)	(12c)
0,13117	0,003026	0,13077	0,13077	0,13074

Die Wahrscheinlichkeit ${}_tq_x^{\text{II}}$ hat die Bedeutung, daß ein x jähriger Ehemann das Jahresende nicht mehr als Verheirateter erlebt, sei es nun, daß er gestorben oder verwitwet ist. Zwangsweise muß daher ${}_tq_x^{\text{II}}$ größer als die Sterbewahrscheinlichkeit der Ledigen sein. Wir wählen daher für unser nächstes Beispiel ${}_tq_x^{\text{II}} = 2\,{}_tq_x^{\text{I}}$ und bestimmen wieder zuerst die Parameter. Für ${}_tq_x^{\text{I}}$ lauten sie wie vorher

$$a_1 = 0,000\,024, \quad b_1 = -0,003\,064 \quad \text{und} \quad c_1 = 1,003\,040.$$

Die Parameter a_3 und b_3 lassen wir unverändert. Zur Bestimmung von a_2 , b_2 und c_2 stehen uns die folgenden drei Gleichungen zur Verfügung:

$$\begin{aligned} 1 &= {}_1p_x^{\text{II}} (0 + 0 + c_2) = {}_0p_x^{\text{II}}, \\ 0,99395 &= {}_1p_x^{\text{II}} (a_2 + b_2 + c_2) = {}_1p_x^{\text{II}}, \\ 0,98801 &= {}_1p_x^{\text{II}} (4\,a_2 + 2\,b_2 + c_2) = {}_2p_x^{\text{II}}, \end{aligned}$$

oder wenn wir durch ${}_1p_x^{\text{II}}$ dividieren

$$1,006\,087 = c_2,$$

$$1,000\,000 = a_2 + b_2 + c_2,$$

$$0,994\,024 = 4\,a_2 + 2\,b_2 + c_2.$$

Daraus folgt für die Parameter $a_2 = 0,000\,055$, $b_2 = 0,006\,142$ und $c_2 = 1,006\,087$.

Auch hier ist wieder $(b_2^2 - 4\,a_2\,c_2) < 0$; wir wenden daher (12c) an:

$$P_x^{\text{I/II}} = (1 - q_x^{\text{II}} q_x) \frac{p_x^{\text{I}}}{p_x^{\text{II}}} \left[\frac{a_1 a_3}{a_2} + \frac{2\,a_2 a_3 b_1 + a_1 a_2 b_3 - 2\,a_1 a_3 b_2}{a_2^2} + \right. \\ \left. + R \ln \frac{a_2 + b_2 + c_2}{c_2} + \frac{2\,S}{(4\,a_2 c_2 - b_2^2)^{\frac{1}{2}}} (\alpha - \beta) \right],$$

mit $\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{(4\,a_2 c_2 - b_2^2)^{\frac{1}{2}}}{2\,c_2 + b_2}$, also $\alpha - \beta = 0,007\,439$.

Wir berechnen $P_x^{\text{I/II}}$ nach den Formeln (3), (5) und (12c) und haben

q_x	q_x^{I}	q_x^{II}	(3), (5)	(12c)
0,13117	0,003026	0,006052	0,13018	0,13038

Auch diese beiden Beispiele zeigen wie die vorhergehenden, daß die Abweichungen nicht bedeutend sind. Immerhin dürfen doch noch keine verallgemeinernden Schlüsse gezogen werden, denn es könnte vorkommen, daß bei besonders gelagerten Wahrscheinlichkeiten die Fehler größer ausfallen.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit haben wir untersucht, wie sich die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, von einer ersten Gesamtheit innert Jahresfrist in eine zweite überzutreten und am Ende des Jahres ihr noch anzugehören, ändert, wenn wir den Verlauf der einfachen Wahrscheinlichkeiten nicht linear annehmen. Auf Grund der im ersten Abschnitt abgeleiteten Grundformel bestimmten wir im zweiten Teil die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für verschiedene in Wirklichkeit mögliche Kombinationen von nicht nur linearem Verlauf der einfachen Wahrscheinlichkeiten. Bei der Anwendung dieser genauen Formeln ist zu beachten, daß auch die einfachen Wahrscheinlichkeiten

aus dem Beobachtungsmaterial entsprechend ermittelt werden müssen; im dritten Abschnitt haben wir daher die Formeln zu deren Bestimmung aufgestellt. Eine allgemeine Aussage über die Größe der Abweichungen von den bis jetzt angewandten Formeln ist durch die gewonnenen Formeln nicht möglich; nur praktische Beispiele lassen vergleichen. Die im vierten Abschnitt durchgeführten numerischen Beispiele mit einer Kombination von linearem und quadratischem Verlauf der Wahrscheinlichkeiten zeigen, daß in den weitaus meisten Fällen die alten Formeln genügen. Daraus darf aber nicht ohne weiteres gefolgert werden, daß die genauen Formeln nie angewendet werden müssen, denn es könnte vorkommen, daß durch speziell gelagerte Wahrscheinlichkeiten die Fehler größer ausfallen. Solche Fälle lassen sich aber wieder nur mittels numerischer Auswertung erkennen.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
I. Abschnitt: Einleitung	3
§ 1. Ableitung der Grundformel	3
§ 2. Bisherige Auswertungen der Grundformel	4
II. Abschnitt: Allgemeinere Auswertung der Grundformel	7
§ 1. Kombination von quadratischem und linearem Verlauf	7
§ 2. Nur quadratischer Verlauf	10
§ 3. Kombination von exponentiellem und linearem Verlauf	12
§ 4. Kombination von hyperbolischem und linearem Verlauf	14
III. Abschnitt: Bestimmung der einfachen Wahrscheinlichkeiten aus den Beobachtungszahlen	15
§ 1. Die Beobachtungszahlen	15
§ 2. Kombination von linearem und quadratischem Verlauf der Beobach- tungszahlen	16
§ 3. Nur quadratischer Verlauf	18
§ 4. Kombination von exponentiellem und linearem Verlauf	19
§ 5. Kombination von hyperbolischem und linearem Verlauf	20
IV. Abschnitt: Numerische Auswertung	22
§ 1. Die Ausgangswahrscheinlichkeiten	22
Zusammenfassung	27

Lebenslauf

Ich wurde als Sohn des Albin Simon und der Clara, geb. Butz, in Allschwil, der Nachbargemeinde meines Heimatortes Schönenbuch (Baselland), am 19. März 1922 geboren. Nach Besuch von 5 Jahren Primarschule und anschließend 3 Jahren Sekundarschule in Allschwil trat ich im Jahre 1936 in die vierte Klasse des mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasiums in Basel ein, das ich im Frühjahr 1941 nach bestandener Maturität verließ. Anschließend immatrikulierte ich mich an der Universität Basel, um mich vor allem dem Studium der Versicherungswissenschaft, der Mathematik, der Nationalökonomie und der Astronomie zu widmen.

Den Herren Professoren Buchner, Fleckenstein, Furlan, Gürtler, Huber, Lewald, Niethammer, Ostrowski, Renfer, Salin, Speiser, Spieß, Wagner und Zwinggi danke ich für die Anregungen, die ich beim Besuch ihrer Vorlesungen, Übungen und Seminarien empfangen habe.

Die vorliegende Arbeit ist auf Veranlassung von Herrn Prof. Dr. Zwinggi entstanden; für die mir von ihm während meines ganzen Studiums gewährte Unterstützung bin ich zu besonderem Danke verpflichtet.

Basel, den 4. Mai 1950.

Albin Simon.

